CORRECTION DU BREVET 2008

Troisième	*Liban*

I - ACTIVITÉS NUMÉRIQUES (12 points)

Exercice 1

1) Si l'on considère l'achat du premier client et l'équation $6x + y = 18,40$, alors on peut dire que ***x*** **représente le prix d'une boule en € et** ***y*** **celui d'une guirlande**.

2) a) Le cœfficient multiplicateur associé à une réduction de 20 % est égal à :

$$1 - \frac{20}{100} = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Par conséquent, **appliquer une réduction de 20 % revient à multiplier ce prix par 0,8**.

b) Le second client a droit à une réduction de 20 % sur tous les articles du magasin ; il paiera donc $0,8 \times x$ euros pour une boule et $0,8 \times y$ euros pour une guirlande. Or il achète cinq boules et cinq guirlandes, et paye 25,60 € ces articles.
On obtient donc l'équation : $5 \times (0,8x) + 5 \times (0,8y) = 25,60$, c'est-à-dire $\mathbf{4x + 4y = 25,60}$.

En divisant les deux membres de cette égalité par 4, on obtient : $\mathbf{x + y = \frac{25,60}{4} = 6,40}$.

3) *Méthode par substitution* :

$$\begin{cases} 6x + y = 18,40 \\ x + y = 6,40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + (6,40 - x) = 18,40 \\ y = 6,40 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6,40 = 18,40 \\ y = 6,40 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 18,40 - 6,40 = 12 \cdot \\ y = 6,40 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{5} = 2,40 \\ y = 6,40 - 2,40 = 4 \end{cases}$$

Vérification : $2,40 + 4 = 6,40$ et $6 \times 2,40 + 4 = 14,40 + 4 = 18,40$; d'où **le couple $(2,40\ ;\ 4)$ est bien solution du système**.

Méthode par combinaisons :

$$\begin{cases} 6x + y = 18,40 & (1) \\ x + y = 6,40 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + y = 18,40 & (1) \\ 5x = 18,40 - 6,40 = 12 & (1) - (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + y = 18,40 & (1) \\ x = \frac{12}{5} = 2,40 & (3) \end{cases} .$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 18,40 - 6 \times (2,40) = 18,40 - 14,40 = 4 \\ x = 2,40 \end{cases}$$

Vérification : $2,40+4=6,40$ et $6\times 2,40+4=14,40+4=18,40$; d'où **le couple $(2,40\ ;\ 4)$ est bien solution du système**.

4) Par conséquent, **le prix d'une boule est de 2,40 € et celui d'une guirlande de 4 €**.

Exercice 2

1) a) $E=(x-5)^2+(x-5)(2x+1)=\left(x^2-2\times 5\times x+5^2\right)+\left(x\times(2x)+x\times 1-5\times(2x)-5\times 1\right)$

Alors, $\mathbf{E}=x^2-10x+25+2x^2+x-10x-5=\mathbf{3x^2-19x+20}$.

b) Soit $x=\sqrt{3}$. Alors $E=3\left(\sqrt{3}\right)^2-19\left(\sqrt{3}\right)+20=3\times 3-19\sqrt{3}+20=29-19\sqrt{3}$.

Donc, $\mathbf{E=29-19\sqrt{3}}$ **lorsque** $\boldsymbol{x=\sqrt{3}}$.

c) **Marc a eu raison de développer E car les calculs, réalisés pour calculer E lorsque $\boldsymbol{x=\sqrt{3}}$, sont plus simples et plus rapides**.

2) a) **La solution de l'équation $\mathbf{E=0}$ qu'a trouvée mentalement** Léa est $\boldsymbol{x=5}$.

En effet, la valeur 5 annule chacun des termes : $(x-5)^2$ et $(x-5)(2x+1)$.

b) Le terme commun dans E est $x-5$; alors :

$E=(x-5)^2+(x-5)(2x+1)=(x-5)(x-5)+(x-5)(2x+1)=(x-5)\left[(x-5)+(2x+1)\right]$

D'où : $\mathbf{E}=(x-5)\left[x-5+2x+1\right]=\boldsymbol{(x-5)(3x-4)}$.

c) D'après la question précédente, résoudre l'équation $E=0$ revient à résoudre l'équation $(x-5)(3x-4)=0$.

Si un produit de facteurs est nul, alors au moins un moins l'un des facteurs est nul.

Donc, $(x-5)(3x-4)=0$ signifie que :

$$\begin{array}{lll} x-5=0 & \text{ou} & 3x-4=0 \\ x=5 & \text{ou} & 3x=4 \\ x=5 & \text{ou} & x=\dfrac{4}{3} \end{array}.$$

Par conséquent, **la seconde solution de l'équation $\mathbf{E=0}$ est $\boldsymbol{x=\dfrac{4}{3}}$**.

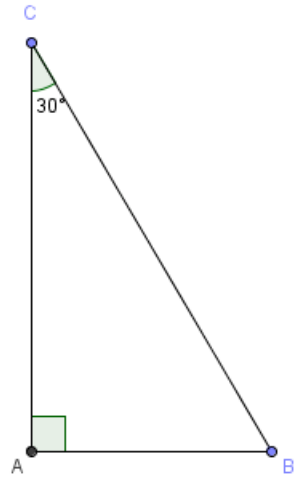
3) Lorsque $x=\dfrac{1}{9}$, la forme de E qui paraît la plus adaptée pour calculer la valeur exacte de E est la formé factorisée.

D'où : $E=\left(\dfrac{1}{9}-5\right)\left(3\times\dfrac{1}{9}-4\right)=\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{45}{9}\right)\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{12}{3}\right)=\left(-\dfrac{44}{9}\right)\left(-\dfrac{11}{3}\right)=\dfrac{484}{27}$. $\dfrac{484}{27}$ est irréductible car 3 et 9 ne divisent ni 44, ni 11. Donc, $\mathbf{E=\dfrac{484}{27}}$ **lorsque** $\boldsymbol{x=\dfrac{1}{9}}$.

II – ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES (12 points)

Exercice 1

1)



Dans un triangle ABC rectangle en A , on connaît la longueur de l'hypoténuse et la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$, alors : $\sin\left(\widehat{ACB}\right)=\dfrac{AB}{BC}$, d'où

$$BC=\frac{AB}{\sin\left(\widehat{ACB}\right)}=\frac{3}{\sin 30°}.$$

La réponse correcte est donc la C.

2) L'image du triangle 2 par la rotation de 120° autour de B dans le sens contraire des aiguilles d'une montre est le triangle 7 ; **la réponse correcte est donc la C**.

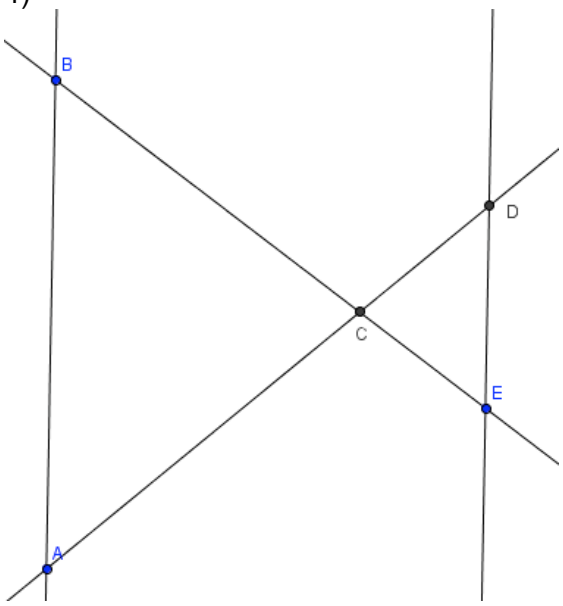
3) $\widehat{AOC}=\widehat{AOB}+\widehat{BOC}=64°+\widehat{BOC}$.

Or l'angle au centre $\widehat{BOC}$ et l'angle inscrit $\widehat{BDC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BC}$.

Alors $\widehat{BOC}=2\times\widehat{BDC}=2\times 20°=40°$. On en déduit que : $\widehat{AOC}=64°+40°=104°$.

La réponse correcte est alors la B.

4)



Les droites (BE) et (AD) sont sécantes en C. Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{CD}{CA}=\dfrac{CE}{CB}=\dfrac{ED}{AB}$, c'est-à-dire $\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{CB}$.

En passant « aux inverses », on obtient : $\dfrac{2}{5}=\dfrac{BC}{9}$.

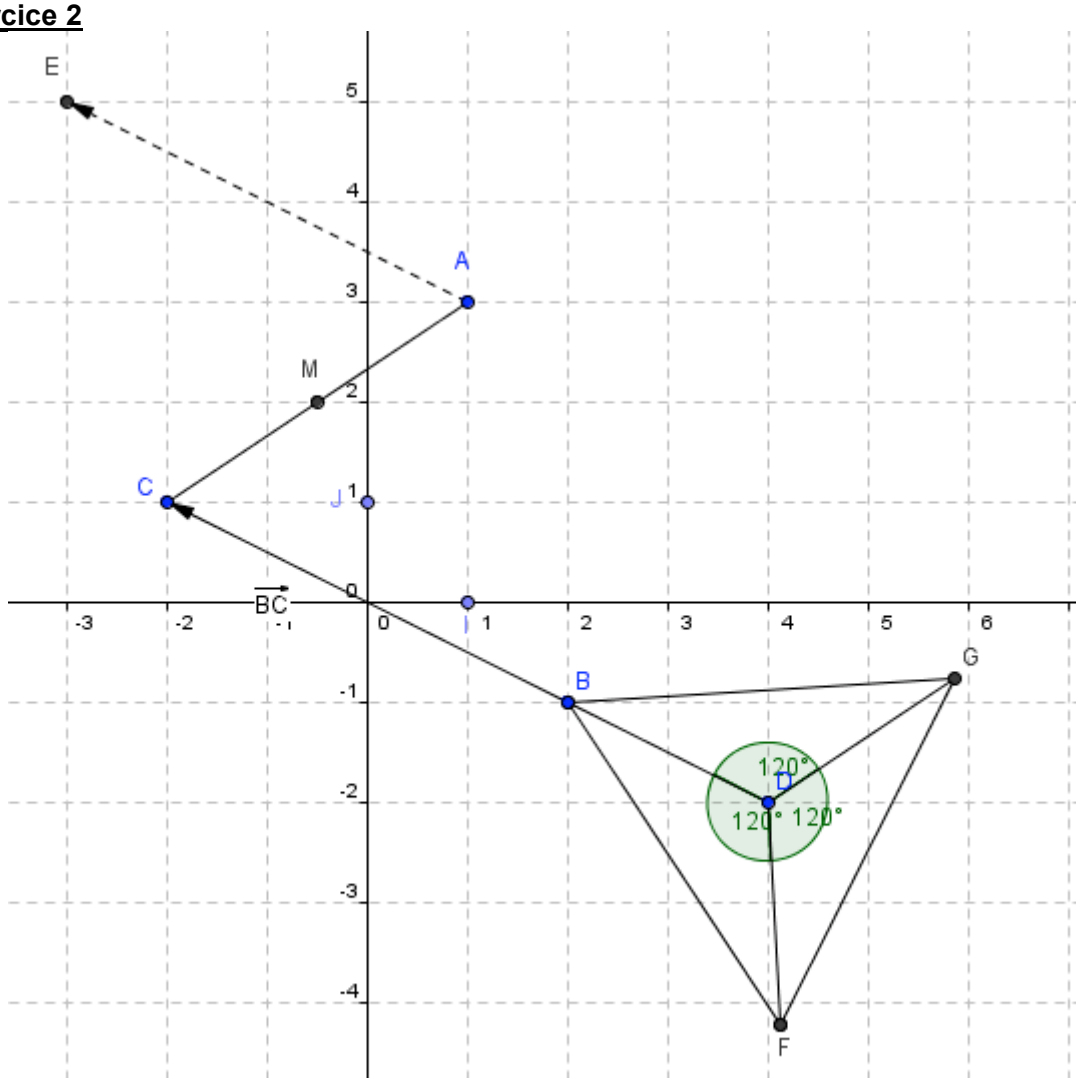
La réponse correcte est donc la C.

Autre méthode : Il n'y a qu'une seule réponse exacte. Or les deux égalités des réponses A et B sont équivalentes. En effet,

$$\frac{2}{9}=\frac{BC}{5}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{2}{9\times BC}=\frac{1}{5}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{2}{BC}=\frac{9}{5}$$

Alors **les réponses A et B ne peuvent pas être correctes**.

Exercice 2



1) Voir graphique ci-dessus.

2) M est le milieu du segment $[AC]$. Alors $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{1+(-2)}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2 \end{cases}$.

Alors **M a pour coordonnées** $\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 2\right)$.

3) **Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées** $(x_C - x_B\ ;\ y_C - y_B)$, c'est-à-dire $(-4\ ;\ 2)$.

4) le quadrilatère ABCE est un parallélogramme si $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$.

Or $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ équivaut à $\begin{cases} x_E - x_A = x_{\overrightarrow{BC}} \\ y_E - y_A = y_{\overrightarrow{BC}} \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} x_E = x_{\overrightarrow{BC}} + x_A = -4 + 1 = -3 \\ y_E = y_{\overrightarrow{BC}} + y_A = 2 + 3 = 5 \end{cases}$.

Par conséquent, le point E a pour coordonnées $(-3\ ;\ 5)$.

5) a) Voir construction ci-dessus.

b) $\mathbf{BD} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}\ \mathbf{cm} \approx \mathbf{2{,}2\ cm}$

III – PROBLÈME (12 points)

Partie I :

1) Comme on désire recouvrir la totalité du fond de la caisse parallélépipédique (de dimensions 96 cm et 156 cm) des paquets cubiques, alors la longueur de l'arête d'un paquet est un diviseur commun à 96 et à 156. Comme on souhaite la longueur maximale, celle-ci correspondra au PGCD des deux nombres.
Cherchons le PGCD de 96 et de 156 :

D'après l'algorithme d'Euclide :

a	b	reste	division euclidienne
156	96	60	156 = 1 × 96 + 60
96	60	36	96 = 1 × 60 + 36
60	36	24	60 = 1 × 36 + 24
36	24	**12**	36 = 1 × 24 + 12
24	12	0	24 = 2 × 12 + 0

Le PGCD de 156 et 96 est le dernier reste non nul, c'est-à-dire 12.

Par conséquent, **la longueur maximale de l'arête d'un paquet est 12 cm**.

2) 156 ÷ 12 = 13 et 96 ÷ 12 = 8. **On pourra donc disposer 13 paquets sur la longueur et 8 paquets sur la largeur au fond de la caisse**.

3) 144 ÷ 12 = 12 ; il y aura donc 12 paquets sur la hauteur de la caisse.
Or $12 \times 8 \times 13 = 1248$. D'où **une caisse pourra contenir 1 248 paquets**.

Partie II :

1) a)

Volume de lessive (en cm^3)	400	800	1600	x
Masse de lessive (en g)	**600**	**1200**	**2400**	$1,5\,x$
Masse totale d'un paquet de lessive (en g)	**800**	**1400**	**2600**	$200 + 1,5\,x$

On sait que 1 cm^3 de lessive pèse 1,5 g. Alors x cm^3 de lessive pèse 1,5 x cm^3.
Comme un paquet vide pèse 200 g, alors un paquet plein contenant x cm^3 de lessive pèse $200 + 1,5x$ cm^3.

b) On voudrait que la masse totale d'un paquet de lessive soit 2300 g. On est donc amené à résoudre l'équation $200 + 1,5x = 2300$.

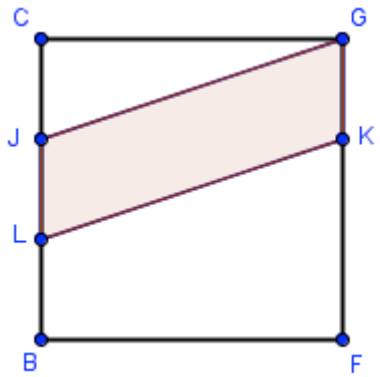
Or $200 + 1,5x = 2300$ équivaut à $1,5x = 2300 - 200 = 2100$, ou encore à $x = \dfrac{2100}{1,5} = 1400$.

Par conséquent, **pour que la masse totale d'un paquet de lessive soit 2300 g, il faut y mettre 1 400 cm^3 de lessive**.

2) a)

Partie III :

1) Comme le dessin est réalisé à l'échelle $\frac{1}{4}$, alors chaque côté de la face BFGC mesurera 3 cm sur cette figure. En effet, $\frac{1}{4} \times 12 = 3$.



2) $aire(\text{LKGJ}) = aire(\text{BFGC}) - aire(\text{GCJ}) - aire(\text{LKFB})$. En utilisant les dimensions du dessin

$aire(\text{GCJ}) = \frac{\text{GC} \times \text{GJ}}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = 1{,}5 \text{ cm}^2$, $aire(\text{LKFB}) = \frac{(\text{LB} + \text{FK}) \times \text{BF}}{2} = \frac{(1+2) \times 3}{2} = 4{,}5 \text{ cm}^2$

$\left(\text{en effet, l'aire d'un trapèze est égale à } \frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}\right)$ et

$aire(\text{BFGC}) = \text{BF}^2 = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$. Donc $aire(\text{LKGJ}) = 9 - 1{,}5 - 4{,}5 = 3 \text{ cm}^2$.

Par conséquent, **l'aire de la bande sur le dessin est 3 cm²**.

Comme le dessin est une réduction de la figure réelle avec un cœfficient égal à $\frac{1}{4}$, alors l'aire de la bande sur le dessin est égale à l'aire réelle de la bande multipliée par $\left(\frac{1}{4}\right)^2$.

D'où $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times (\text{aire réelle de la bande}) = 3$, c'est-à-dire aire réelle de la bande $= 3 \times 16 = 48$.

Donc, **l'aire réelle de la bande LKGJ est égale à 48 cm^2**.